

文章编号:1000-8055(2013)12-2655-08

地面效应中前飞旋翼的自由尾迹计算

辛 冀, 李 攀, 陈仁良

(南京航空航天大学 航空宇航学院

直升机旋翼动力学国家级重点实验室, 南京 210016)

摘 要: 发展了一种自由尾迹模型,用于对地面效应状态下的旋翼前飞流场进行数值模拟,并求解该状态下的旋翼气动特性.为了扩大模型的适用范围,使用了面元法模拟地面对流场的影响.为提高尾迹迭代的收敛性和精度,在计算模型中引入了地下尾迹等比例修正、环式地面面元分布等改进措施.结果显示:前进比增加,地面附近的旋翼流场由环流模式转变为地面涡模式.在前飞速度很小时出现的环流,对旋翼前缘的轴向下洗速度影响十分强烈,导致此时出现随前进比增加,旋翼拉力减小、需用功率几乎不变的特殊现象.将得到的旋翼气动特性参数随前进比变化情况同实验值进行了对比,证实了新构建模型的准确性.

关 键 词: 地面效应; 旋翼; 自由尾迹; 面元法; 地面涡

中图分类号: V211.52

文献标志码: A

Calculation of free-wake of forward flying rotor in ground effect

XIN Ji, LI Pan, CHEN Ren-liang

(National Key Laboratory of Rotorcraft Aeromechanics, College of Aerospace Engineering,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: A free-wake based model was developed to predict the flow field and performance of a forward flying rotor in ground effect. In order to expand the application range of the model, the ground was modeled using surface panel method to simulate the influence of ground upon the flow field. For further improving the prediction convergence and accuracy, modification measures such as rectifying the wake vortices below the ground plane proportionally and distributing the ground panels circularly were incorporated into the model. The prediction results show that as the advance ratio increases, the flow regime below the rotor changes from recirculation to ground vortex mode. When rotor gets into the recirculation regime at extremely low advance ratio, the downwash velocity across rotor leading edge is very large. Which leads to an unexpected phenomenon that the rotor thrust decreases and the required rotor power almost keeps constant while the advance ratio increases. The predicted characteristic values of rotor aerodynamics at different advance ratios were then compared with experimental results and conformed well, proving the accuracy of the newly founded model.

Key words: IGE(in ground effect); rotor; free-wake; panel method; ground vortex

当直升机在地面效应(in ground effect, IGE)状态下低速飞行时,由于“地面涡”的出现^[1-3],在

相同拉力、相同高度和速度下旋翼的需用功率较无地面效应时会有所增加,旋翼桨毂力矩随前进

收稿日期:2012-11-14

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20131111.1602.003.html>

基金项目:江苏省普通高校研究生科研创新计划(CXLX12_0166);中央高校基本科研业务费专项资金

作者简介:辛冀(1988—),男,黑龙江鸡西人,博士生,主要从事直升机空气动力学研究.

比会发生不规则的变化.旋翼在IGE前飞状态下的这一特性与IGE悬停状态不同,需要给予专门的研究.

从1965年实验发现地面涡以来^[4],国际上对旋翼IGE低速前飞科目进行了大量实验^[2,5-6],发现该状态下的旋翼流场可分为环流(recirculation)和地面涡(ground vortex)两种流动模式,彼此之间在涡量分布和速度非定常波动方面均有较大差别.这些特殊的流动形态是旋翼气动特性和需用操纵量发生不规则变化的主要原因^[1].与此同时,对旋翼近地前飞状态的理论建模研究也在不断发展深入,早期工作如文献^[7]采用固定涡系模型模拟IGE状态下的旋翼近地尾迹特性.随着计算机速度的提高,文献^[8-9]使用了CFD方法捕捉地面涡位置,但是CFD方法受限于固有的数值耗散,对处于远场位置的地面涡的数值模拟难度较大,且计算效率不高.自由尾迹方法对流场采用拉格朗日方法描述,能自动保持流场涡量的守恒,近二十年来有众多使用自由尾迹方法研究旋翼地面效应的文章发表^[10-14].

已有研究大都反映出IGE前飞状态下地面附近的特殊涡流动是由尾迹涡线在地面附近堆叠而成的,孙茂和Lee等^[10,12]根据实验结果,在流场中人为加入一根预定涡线来模拟地面涡的影响.Saberi,Griffiths等^[11,14]通过增加自由尾迹周数来达到完全模拟地面涡的目的.对于地面对流场的干扰作用,一些工作^[10,13]采用镜像法进行模拟.但镜像法仅适用于模拟无限地面的地面效应,文献^[15-16]使用了适用范围更广的面元法对地面进行建模.

为使所构建的计算模型更具一般性,以反映出IGE前飞状态下复杂的旋翼流场形态,本文采用增加一定周数自由尾迹的办法来模拟地面附近的涡流场.同时针对面元法模拟地面影响时暴露出的不易收敛、尾迹容易失真等问题^[16],本文在计算模型中引入等比例尾迹修正的同时,还提出了根据尾迹特有形态、在地面按环式布置梯形面元的改进办法,这样既可以维护尾迹的物理形态,避免“计算噪声”,又可以方便地根据各区域尾迹-地面干扰的剧烈程度不同而布置不同密度的网格.使用改进后的模型对IGE前飞状态下的旋翼流场进行数值模拟并对地面附近的特殊涡流形态进行了绘制、分析.最后求解了不同速度下的旋翼气动特性,并同实验值进行了对比讨论.

1 数值计算模型

1.1 桨叶升力面模型

本文采用计算精度较高的升力面模型对桨叶进行建模,如图1所示,桨叶表面的涡环、控制点布置方式见文献^[17].涡环的强度根据控制点处的流动不可穿透条件求解,如式(1)所示.

$$\nabla \Phi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1)$$

其中 Φ 是控制点处流场合速度势, $\mathbf{n}$ 是控制点处的法向单位向量.自由尾迹迭代收敛之后,桨叶各面元处的迎角就可以根据该面元处的流场气流速度确定,然后查表得到该面元上的升、阻力系数.

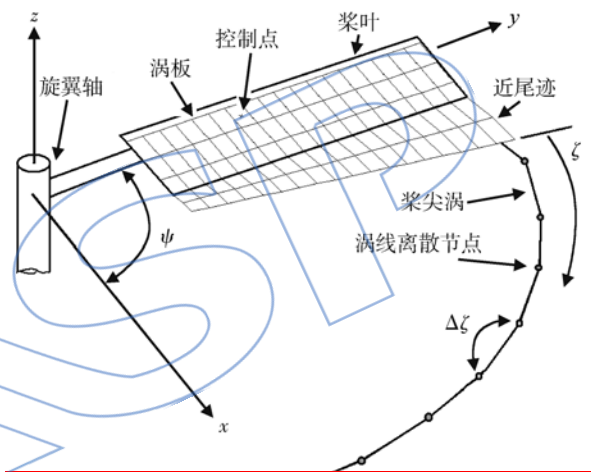


图1 桨叶升力面和桨尖涡线示意图

Fig. 1 Schema of the blade lifting-surface and tip vortice model

1.2 旋翼自由尾迹模型

桨叶后缘处的附着涡会拖出尾随涡丝形成近尾迹,外侧近尾迹在被拖出 $30^\circ \sim 60^\circ$ 寿命角之后会卷起成为一根桨尖涡线,如图1中所示.

本文采用仅保留桨尖涡线的旋翼尾迹模型^[10-16],以直涡元离散桨尖涡线,以离散的桨叶方位角 ψ 和节点寿命角 ζ 对涡线节点进行编号,各涡线节点以流场当地速度自由运动发展,相应的节点运动控制方程为

$$\frac{d\mathbf{r}(\psi, \zeta)}{dt} = \mathbf{v}_\infty + \mathbf{v}_{\text{blade-induce}}(\psi, \zeta) + \mathbf{v}_{\text{freewake-induce}}(\psi, \zeta) + \mathbf{v}_{\text{ground-induce}}(\psi, \zeta) \quad (2)$$

其中 $\mathbf{r}(\psi, \zeta)$ 是涡线节点坐标; $\mathbf{v}_\infty$ 是自由来流速度; $\mathbf{v}_{\text{blade-induce}}(\psi, \zeta)$, $\mathbf{v}_{\text{freewake-induce}}(\psi, \zeta)$, $\mathbf{v}_{\text{ground-induce}}(\psi, \zeta)$ 三者分别是桨叶附着涡、自由尾迹和地面面元在该节点处的诱导速度.本文工作对式(2)采用收

敛性较好的 PIPC(pseudo-implicit predictor and corrector)算法进行迭代求解,该算法是一种伪隐式的预报-校正-松弛迭代法,详细求解过程见文献[18].

在旋翼地面效应状态下,地面附近的涡元长度变化非常明显,此时除涡核中的分子动量扩散和湍流黏性扩散效应之外,涡元伸缩效应引起的涡核半径变化也不可忽略.根据文献[19],加入这一效应后的涡核半径可如式(3)进行计算

$$r_c(\zeta, \epsilon) = \sqrt{r_0^2 + \frac{4\alpha(1 + \nu_l Re_\nu)\nu}{\omega} \int_{\zeta_0}^{\zeta} (1 + \epsilon(\zeta))^{-1} d\zeta} \quad (3)$$

式中 ν 为运动黏度; ν_l 为涡元的湍流黏度,取值见文献[20]. $\alpha=1.2564$ 为 Oseen 常数, Re_ν 为运动雷诺数, $\epsilon(\zeta)$ 为涡元上 ζ 寿命角处 $d\zeta$ 微段在 $d\zeta/\omega$ 时间段上发生的应变, ω 为旋翼旋转角速度.

1.3 地面模型的改进

本文采用面元法模拟地面对 IGE 旋翼流场的影响,面元类型采用均布源面元^[17].为避免矩形面元正交分布引起的尾迹涡线形状失真^[16],本文根据尾迹的特殊形态,在地面呈环式布置梯形面元,旋翼尾迹与地面网格面元的相对位置如图 2 所示.

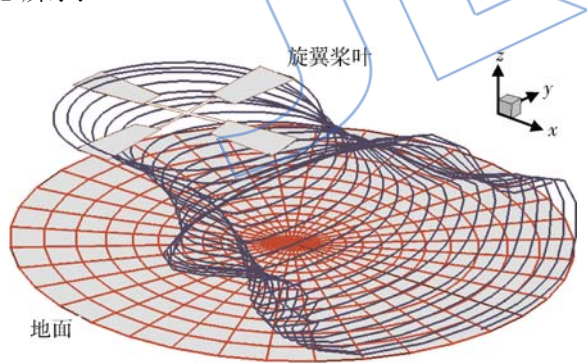


图 2 旋翼尾迹与地面网格面元的相对位置示意图

Fig. 2 Schema of locations of rotor wake and ground mesh panels

鉴于前飞时地面附近有涡线扫过的区域与悬停时不同,若以旋翼桨毂中心点为坐标系原点,地面环形网格中心的坐标可按式估算:

$$\begin{cases} x_{\text{mid}} = 0 + h \cdot V_{\infty} / v_i \\ y_{\text{mid}} = 0 \\ z_{\text{mid}} = -h \end{cases} \quad (4)$$

其中 h 是旋翼高度, V_{∞} 是直升机前飞速度, v_i 是旋翼诱导速度,其初始值可根据目标旋翼拉力系数

C_t 值求出^[21],而后在自由尾迹迭代中随尾迹位置而更新.

为了保证计算精度的前提下,尽量减小地面面元网格的覆盖面积以减小计算量.本文以高度 $h=1.0R$ 的旋翼(R 为旋翼半径),搭配覆盖半径为 $10.0R$ 的地面网格为算例,考察了不同径向位置之外的所有源面元对旋翼的轴向诱导速度作用占地面网格总体诱导作用的百分比,如图 3 所示,其中横轴 r/R 代表径向位置,纵轴代表旋翼轴向入流诱导作用占地面网格面元总体作用的比例.可见, $2.0R$ 之内的地面网格面元几乎构成了全部的地面诱导作用,而 $4.0R$ 之外的面元对旋翼的诱导作用基本接近于 0.据此,考虑到小速度前飞时自由尾迹可能在纵向上延伸 $4.0R \sim 5.0R$,本文工作将面元覆盖范围取为半径 8 倍 ~ 10 倍于旋翼的圆.

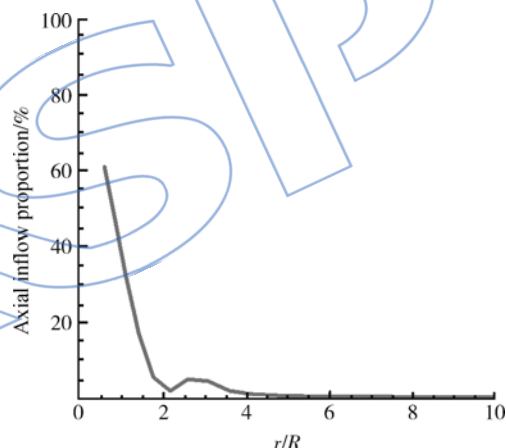


图 3 各径向位置外面元对旋翼轴向入流诱导作用占地面网格面元总体作用的比例

Fig. 3 Proportion of axial inflow induced by panels outside certain radius compare to which induced by all ground mesh panels

1.4 IGE 前飞状态下使用的自由尾迹模型

为避免尾迹发展中由于部分涡丝落入地面下方导致的迭代不收敛问题,本文在尾迹迭代中加入了一种“等比例修正方法^[16]”——在每次尾迹推进之后,如果有涡线节点落入地面下方,则对所有尾迹节点按相同比例进行高度修正、以最小的更改将涡线调整为全部位于地上的形式,再以之作为初始尾迹继续迭代.图 4 中的图 4(a)和图 4(b)分别是修改前和修改后的尾迹形态.

地面涡是在自由来流、旋翼尾迹和地面的共同作用下,在旋翼前缘下方形成的一条马蹄形涡线.一般认为地面涡由地面附近堆积卷绕的桨尖

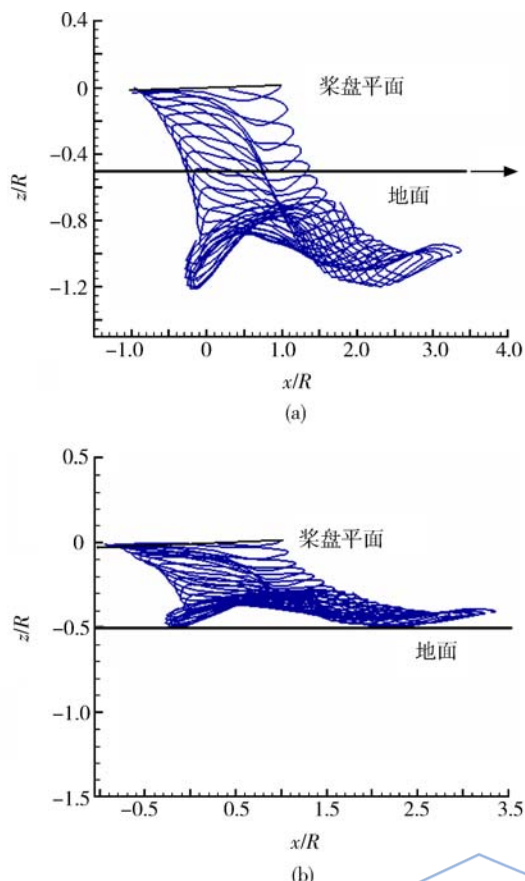


图4 对沉入地面下方自由尾迹的等比例修正

Fig. 4 Proportionally rectification for the free-wake moves below the ground plane

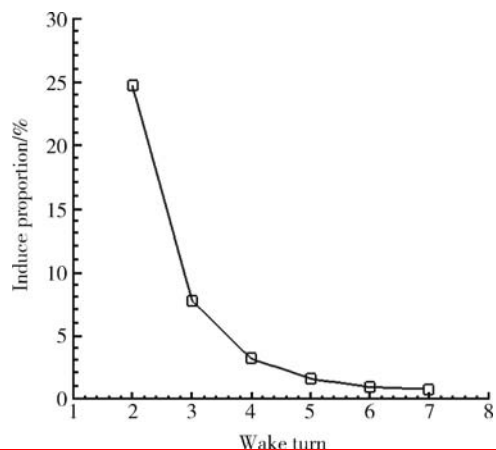
涡线构成^[3,6,14],因而为使所构建的自由尾迹模型达到一定精度,就要求所用的自由尾迹模型具有足够的周数.而出于计算效率及尾迹收敛性考虑,又要求所用的自由尾迹周数尽可能的少.

因此有必要考察计算模型,以使用最少的尾迹周数获得比较准确的旋翼性能值.文献[14]使用不同周数的自由尾迹进行计算后对比尾迹结构,认为采用6周与采用12周尾迹模型计算时得到的近场尾迹结构基本一致.本文将通过计算各周尾迹涡丝的诱导作用在旋翼平均诱导入流中所占比例来进一步考察远场尾迹涡丝的去掉对旋翼气动特性的影响.

本文选取的计算目标值,是各周自由尾迹对桨盘处诱导速度平均值的贡献相比于该周之前所有尾迹的合贡献所占的比例.计算式如式(5)所示

$$\epsilon = \frac{\bar{v}_{i,n}}{\bar{v}_{i,1} + \bar{v}_{i,2} + \dots + \bar{v}_{i,(n-1)}} \quad (5)$$

式中 $\bar{v}_{i,n}$ 代表第 n 周自由尾迹在桨盘处的平均诱导速度.图5所示是 $0.6R$ 高度 IGE 悬停旋翼拖出的各周尾迹对应的 ϵ 值.

图5 $h=0.6R$ 悬停状态下各周尾迹对应的 ϵ 值Fig. 5 ϵ value of each wake turn when rotor hovering at $h=0.6R$

由图5可见,第6周尾迹涡丝对桨盘平面的平均诱导速度作用低于前5周作用之和的1%,第7周的作用进一步减小.当旋翼高度高于 $0.6R$ 时,远场尾迹对桨盘平面的诱导作用会更小;而由于直升机起落架和机身占有高度,旋翼离地距离通常也不会低于 $0.6R$.因此,保留6周涡丝的自由尾迹模型已足以保证 IGE 状态旋翼气动特性的计算精度.

2 计算结果和讨论

本文的计算选取 Curtiss 于 1984 年进行的旋翼地面效应实验作为对比.由于需要表达的数据和图片较多,出于文章的简洁性考虑,本文仅选用有代表性的旋翼高度在 $0.68R$ 时的旋翼 IGE 前飞状态实验作为算例.直升机的实际近地机动飞行科目均在较低的前飞速度下进行,相应地, Curtiss 的地面效应实验中着重研究了前进比 μ 在 $0 \sim 0.1$ 之间的旋翼,该实验的模型参数和实验状态数据见文献[5].为一次测得不同前进比下的实验数据,该实验测量中实际上使旋翼在以 $0.01g$ 的小加速度作缓慢加速运动.在各种前进比下,旋翼总距设为 10° ,周期变距保持在前进比为 0.05 时的配平值.

2.1 旋翼流场计算

在旋翼处于高度 $h=0.68R$ 、前进比 $\mu=0.03$ 的状态下时,计算得到的旋翼自由尾迹如图6所示,旋翼纵向截面流线和横向截面流线如图7与图8所示.从这几幅图中可以看出旋翼前下方确实形成了马蹄形的涡量集中区域,也是自由尾迹涡线在地面附近因卷起而集中的区域.

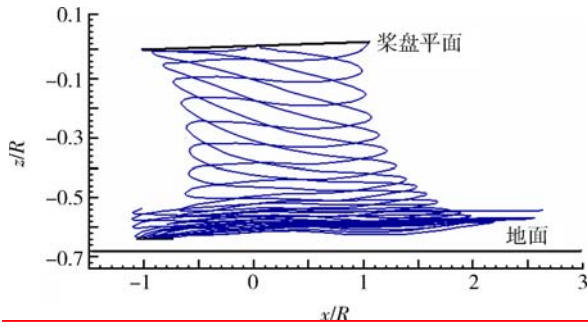


图 6 IGE 状态下 $h=0.68R$, $\mu=0.03$ 时旋翼自由尾迹图

Fig. 6 Wake geometries of IGE rotor flying at $h=0.68R$, $\mu=0.03$ condition

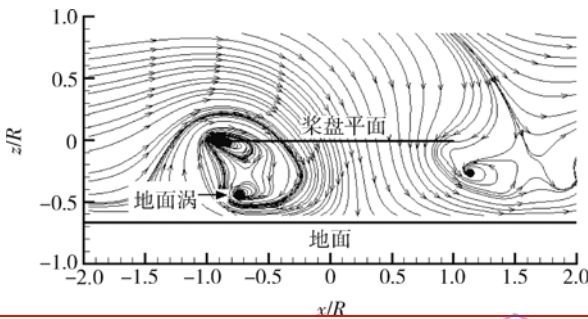


图 7 IGE 状态下 $h=0.68R$, $\mu=0.03$ 时旋翼纵向截面流线图

Fig. 7 Longitudinal streamline plot of IGE rotor flying at $h=0.68R$, $\mu=0.03$ condition

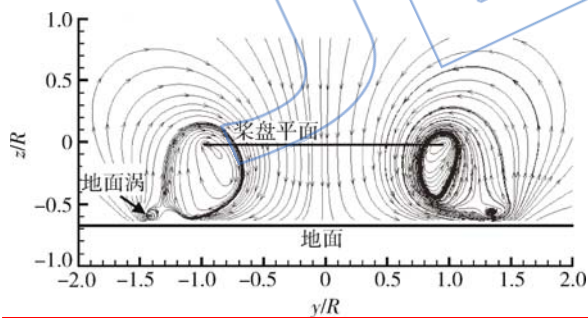


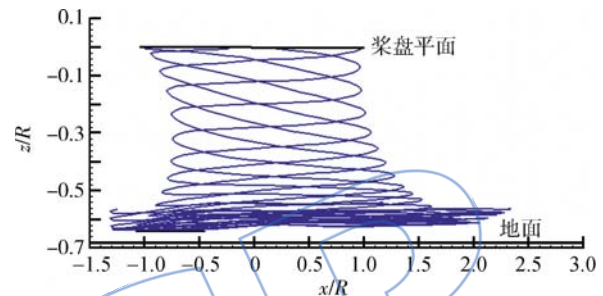
图 8 IGE 状态下 $h=0.68R$, $\mu=0.03$ 时旋翼横向截面流线图

Fig. 8 Lateral streamline plot of IGE rotor flying at $h=0.68R$, $\mu=0.03$ condition

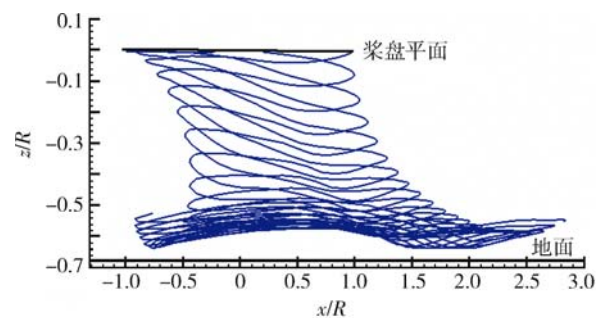
图 9 中一系列图片是旋翼高度 $h=0.68R$ 、前进比由小到大变化时的自由尾迹图和纵向截面流线图。

由图 9 中各流线图可以看出,随着旋翼前进比的增加,地面涡的中心位置逐渐后移。在 $\mu=0.02$ 时,地面附近的涡流对旋翼上方的流动还有较大影响,这一现象同实验中观察到的环流(re-

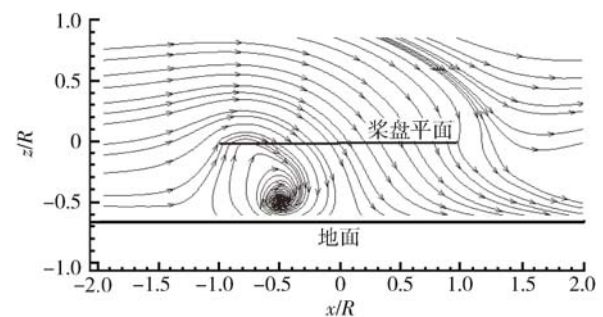
circulation)模式相一致;在 $\mu=0.04$ 及更高前进比时,旋翼前缘下方的涡量已经卷得比较紧,呈小范围的涡流形态,对旋翼的影响较小,同实验中观察到的该速度下地面涡(ground vortex)模式相符;在 $\mu=0.08$ 时,地面涡消失,旋翼流场与无地效前飞时不再有明显差别。每片桨叶脱出的桨尖涡线中大约有 3 周~4 周在地面附近卷起,这种运动规律也同文献[3,6]的实验测量结果相一致。



(a) $\mu=0.02$



(b) $\mu=0.04$



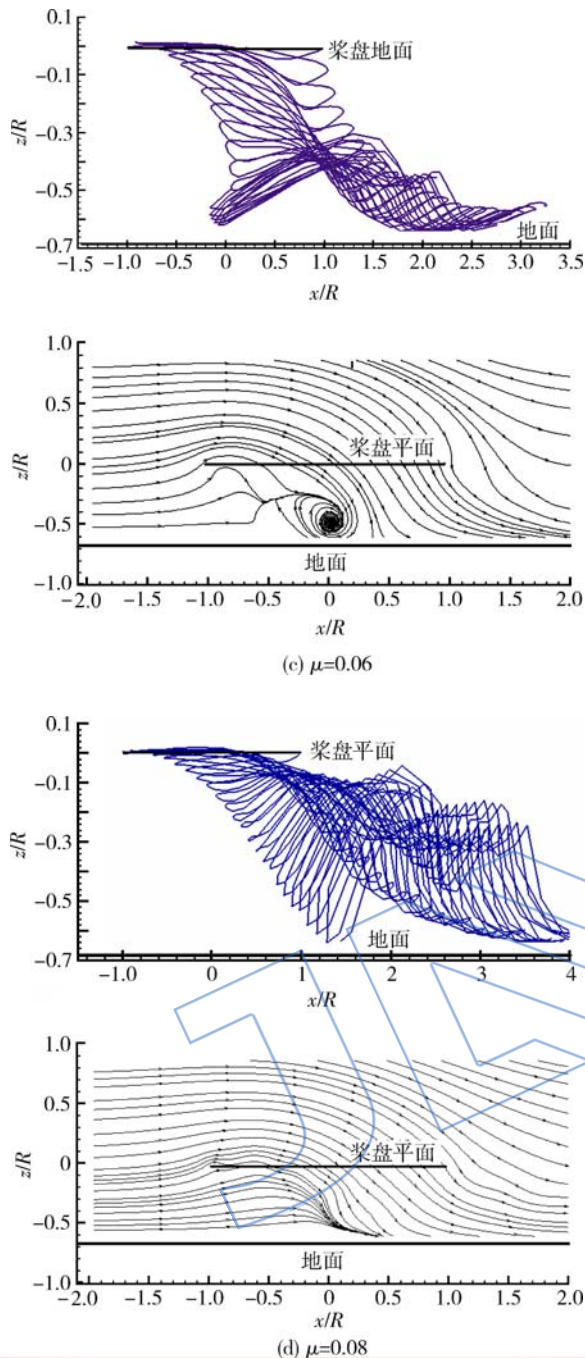


图9 $h=0.68R$,不同前进比下旋翼尾迹图和旋翼流场流线图

Fig. 9 Wake geometries and flow-field streamline figure of rotor flying at $h=0.68R$ and different advance ratios

2.2 旋翼气动特性计算

图10所示是同一高度、不同前进比状态下,旋翼桨毂平面上纵向入流的对比。

由图10可见,在速度较小时($\mu=0.01, 0.02$),旋翼前缘的轴向下洗速度 V_z 较悬停时有明显增加,这是由于此时尾迹在旋翼前方堆积,形

成的环流对旋翼前缘产生一个向下的诱导速度所致。在速度较大时($\mu=0.05, 0.06$),旋翼前缘的轴向下洗速度减小,且速度型分布整体有一个后移,这是因为流场由环流模式转变为地面涡模式后,构成地面涡的尾迹位置较为靠后,对旋翼前缘的诱导速度方向变为向上而引起。

图11~图13分别是处于 $0.68R$ 高度时旋翼的拉力系数 C_l 、需用功率系数 C_q 和纵向桨毂力矩系数 C_m 随前进比变化情况的计算值与实验值的对比。

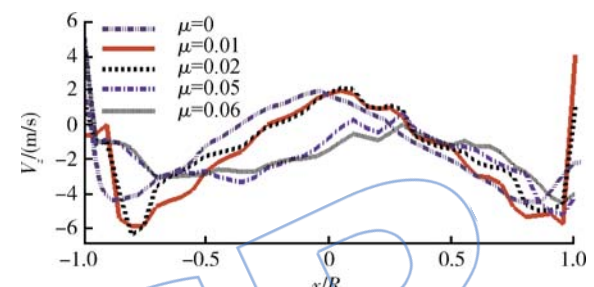


图10 $h=0.68R$,不同旋翼前进比对应的旋翼纵向入流分布
Fig. 10 Longitudinal inflow distribution of rotor flying at $h=0.68R$ and different advance ratios

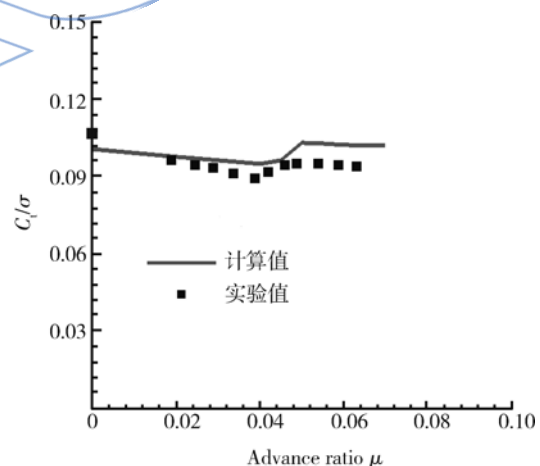


图11 IGE状态下旋翼 $h=0.68R$ 时拉力系数随前进比变化情况的实验值与计算值对比

Fig. 11 Comparison of experimental and determination values for the thrust coefficient variation with advance ratios, when rotor at $h=0.68R$ in ground effect

图11~图13中 σ 表示旋翼实度, a 代表旋翼翼型的升力线斜率。由图可见,计算得到的旋翼气动特性变化趋势与实验值相比基本一致,证实了本文模型具有较好的计算精度。因为实验测量时

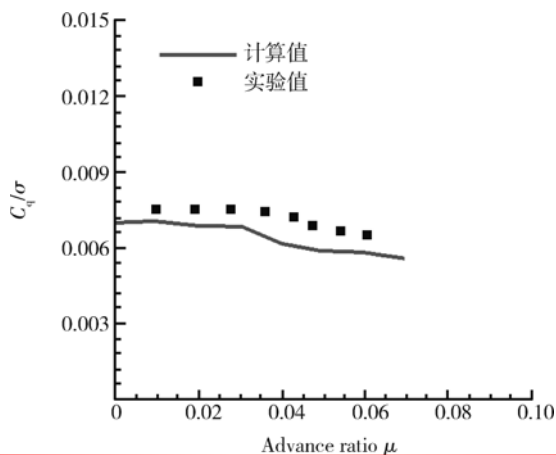


图 12 IGE 状态下旋翼 $h=0.68R$ 时需用功率系数随前进比变化情况的实验值与计算值对比

Fig. 12 Comparison of experimental and determination values for the power coefficient variation with advance ratios, when rotor at $h=0.68R$ in ground effect

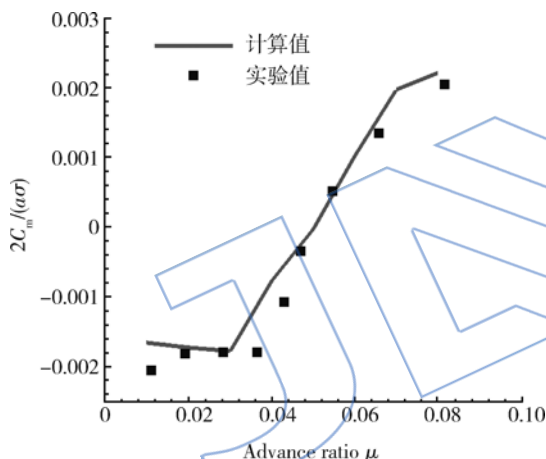


图 13 IGE 状态下旋翼 $h=0.68R$ 高度时纵向桨毂力矩系数随前进比变化情况的实验值与计算值对比

Fig. 13 Comparison of experimental and determination values for the longitudinal hub moment coefficient variation with advance ratios, when rotor at $h=0.68R$ in ground effect

旋翼存在一个 $0.01g$ 的加速运动,而计算结果则是对定常状态下旋翼流场进行松弛迭代获得的,因而两者之间存在一定偏差。

从图 11~图 13 可以看出,在总距与周期操纵量固定的条件下,在 $\mu \in (0, 0.04)$ 的小前进比范围内,IGE 状态下旋翼的拉力和桨毂纵向力矩略有减小、需用功率则几乎不变,这与无地效前飞时的变化规律有所不同^[21]。参考图 10,这是由于在此状态下,部分尾迹堆积在旋翼前方,对旋翼前

缘产生了一个向下的诱导速度作用,使该处桨叶迎角减小、诱导功率增大所致。当前飞速度进一步增大时,尾迹卷起位置后移,对旋翼前缘的诱导速度作用由向下变为向上,使当地迎角增大,造成此时的旋翼拉力略有增大、诱导功率略有减小,而抬头力矩则快速增加。

3 结 论

1) 本文开发的 IGE 前飞状态旋翼自由尾迹计算模型能反映出该状态下特有的环流、地面涡等流动模式。计算得到的旋翼气动特性随前进比的变化趋势与实验数据基本一致,证实了模型的准确性。

2) IGE 小速度前飞中地面附近的环流、地面涡等流动模式是在旋翼、地面和自由来流三者共同作用下,尾迹涡线在前部旋翼下方堆积、卷起而形成的。随前进比增加,地面涡逐渐向后方移动,涡量的集中区域也越来越小,直至被自由来流吹散。

3) 旋翼前进比处于 $0 \sim 0.04$ 范围时,受地面附近的环流模式影响,旋翼前缘的轴向下洗流速度很大,这导致在高度和总距不变时,随前进比的增加出现旋翼拉力减小、需用功率和纵向桨毂力矩几乎不变的特殊现象。这种变化特点与旋翼无地效前飞时差别很大,应给予特别重视。

参考文献:

- [1] Sheridan P F, Weisner W. Aerodynamics of helicopter flight near the ground[R]. Washington DC: The 33rd Annual AHS Forum, 1977.
- [2] Curtiss H C, Sun M, Putman W F, et al. Rotor aerodynamics in ground effect at low advance ratios[J]. Journal of the American Helicopter Society, 1984, 29(1): 48-55.
- [3] Ganesh S, Komerath N. Study of ground vortex structure of rotorcraft in ground effect at low advance ratios[R]. AIAA-2006-3475, 2006.
- [4] Jenkins J L Jr. Trim requirements and static-stability derivatives from a wind-tunnel investigation of a lifting rotor in transition[R]. NASA TND-2655, 1965.
- [5] Curtiss H C, Erdman W, SUN M. Ground effect aerodynamics[J]. Vertica, 1987, 11(1): 29-42.
- [6] Nathan N D, Green R B. Measurements of a rotor flow in ground effect and visualisation of the brown-out phenomenon[R]. Montreal, Canada: The 64th Annual American Helicopter Society Forum, 2008.
- [7] 何承健, 高正. 贴地飞行的旋翼尾迹研究[J]. 航空学报, 1986, 7(4): 325-331.
HE Chengjian, GAO Zheng. A study of the rotor wake in nap-of-the-earth[J]. Acta Aeronautica et Astronautica

- Sinica, 1986, 7(4): 325-331. (in Chinese)
- [8] Kang N, Sun M. Simulated flowfields in near-ground operation of single and twin-rotor configurations[J]. *Journal of Aircraft*, 2000, 37(2): 214-220.
- [9] 叶靓, 招启军, 徐国华. 基于非结构嵌套网格方法的旋翼地面效应数值模拟[J]. *航空学报*, 2009, 30(5): 780-786.
- YE Liang, ZHAO Qijun, XU Guohua. Numerical simulation on flowfield of rotor in ground effect based on unstructured embedded grid method[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2009, 30(5): 780-786. (in Chinese)
- [10] 孙茂, Curtiss H C. 近地低速飞行时旋翼尾涡系的畸变及其诱导速度[J]. *空气动力学学报*, 1989, 7(1): 35-42.
- SUN Mao, Curtiss H C. Rotor vortex wake distortion and its induced velocity in ground effect at low speed[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 1989, 7(1): 35-42. (in Chinese)
- [11] Saberi H A, Maisel M D. A free-wake rotor analysis including ground effect[R]. Saint Louis, US: The 43rd Annual American Helicopter Society Forum, 1987.
- [12] Lee C S, He C J. A free wake/ground vortex model for rotors at low speed in-ground-effect flight[R]. Mountain View, US: The 51st Annual American Helicopter Forum, 1995.
- [13] Pulla D, Conlisk A T. The long time structure of the rotor wake in ground effect[R]. AIAA-2005-1408, 2005.
- [14] Griffiths D A, Ananthan S, Leishman J G. Predictions of rotor performance in ground effect using a free-vortex wake model[J]. *Journal of the American Helicopter Society*, 2005, 50(4): 302-314.
- [15] Itoga N, Nagashima T, Iboshi N, et al. A new numerical method for predicting aero-mechanical behaviors of a rotor hovering at close proximity to inclined flat surface[R]. Montreal, Canada: The 55th Annual American Helicopter Society Forum, 1999.
- [16] Griffiths D A. A study of multi-rotor interference and ground effect using a free-vortex wake model[D]. Washington DC: University of Maryland, 2001.
- [17] Katz J, Plotkin A. Low-speed aerodynamics[M]. 2nd ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2001.
- [18] Bagai A. Contributions to the mathematical modeling of rotor flow-fields using a pseudo-implicit free-wake analysis [D]. Washington DC: University of Maryland, 1995.
- [19] Anathan S, Leishman J G. Role of filament strain in the free-vortex modeling of rotor wakes[J]. *Journal of the American Helicopter Society*, 2004, 49(2): 176-191.
- [20] 李攀, 陈仁良. 旋翼桨尖涡模型及其参数确定方法研究[J]. *空气动力学学报*, 2009, 27(3): 296-302.
- LI Pan, CHEN Renliang. Research on rotor tip vortex model and the method for determining its parameter[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2009, 27(3): 296-302. (in Chinese)
- [21] 王适存. 直升机空气动力学[M]. 北京: 航空专业教材编审组, 1985.